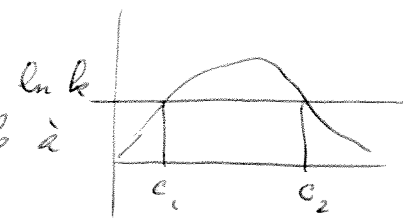
MAT4575 Devoir #3 M. ALVO

1. #6.52 On calcule $\max_{\omega} L(\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\theta_2'}\right)^n \exp - \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{2\,\theta_2'}$

et $\max_{\Omega} L(\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\hat{\theta}_2}\right)^n \exp - \frac{n}{2}$, $\hat{\theta}_2 = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}$

alors $\Lambda = C \cdot \left(\hat{\theta}_2\right)^{n/2} \cdot e^{-n\hat{\theta}_2/2\theta_2'} \leq k$

$\Longleftrightarrow \quad h(\hat{\theta}_2) = \left(\frac{n}{2}\right)\ln\hat{\theta}_2 - \left(\frac{n}{2\,\theta_2'}\right)\hat{\theta}_2 \leq \ln k$



La fonction h a un maximum et resemble à

L'inégalité ci-dessus implique qu'il existe deux constantes telles qu'on rejette H_0 si

$$\Sigma(x_i-\bar{x})^2 \leq c_1 \quad \text{ou} \quad \Sigma(x_i-\bar{x})^2 \geq c_2$$

2. 6.5.8 On calcule $\max_{\omega} L(\theta) = L(\hat{\theta})$ où $\hat{\theta} = \frac{n_1\bar{x} + n_2\bar{y}}{n_1+n_2}$

$$= \left(\frac{1}{\hat{\theta}}\right)^{n_1+n_2} \exp^{-(n_1+n_2)}$$

aussi $\max_{\Omega} L(\theta) = \left(\frac{1}{\hat{\theta}_1}\right)^{n_1} \exp - n_1 \left(\frac{1}{\hat{\theta}_2}\right)^{n_2} e^{-n_2}$ où

$$\hat{\theta}_1 = \bar{x} \quad , \quad \hat{\theta}_2 = \bar{y}$$

$$\Lambda = \left(\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}}\right)^{n_1}\left(\frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}}\right)^{n_2} = \left(\frac{U}{U+V}\right)^{n_1}\left(1-\frac{U}{U+V}\right)^{n_2} \quad \text{où}$$

On sait que $U = \Sigma X \sim \text{Gamma}(n_1, 1/\theta)$ et $V = \Sigma Y \sim \text{Gamma}(n_2, 1/\theta)$

Alors $B = \dfrac{U}{U+V} \sim \text{Beta}(n_1, n_2)$

Donc $\Lambda = B^{n_1}(1-B)^{n_2}$

3.6.5.8 a) On utilise la distribution multinomiale

b) $-\log \Lambda = \sum_{1}^{k} x_i \left[\log x_i/_n - \log p_{io}\right]$

Par la série de Taylor

$$\log p_{io} = \log\left(\frac{x_i}{n}\right) + \frac{1}{(x_i/n)} \cdot \left(p_{io} - x_i/_n\right) - \frac{1}{2(p_i')^2}\left(p_{io} - x_i/_n\right)^2$$

où p_i' se trouve entre p_{io} et $x_i/_n$.

On note que $\sum p_{io} = 1 = \sum (x_i/_n)$. alors

$$-\log \Lambda = \frac{1}{2}\sum x_i \frac{1}{(p')^2}\left(p_{io} - x_i/_n\right)^2$$

et $$-2\log \Lambda = \sum_i \frac{x_i(x_i - np_{io})^2}{(np')^2}$$

c) Pour n grand, p_i' et $x_i/_n$ tendent ver p_{io} sous H_o en probabilité

Alors $$\frac{x_i}{(np')^2} = \left(\frac{x_i}{n}\right)\frac{1}{n\,(p')^2} \approx \frac{p_{io}}{n\,p_{io}^2} = \frac{1}{n\,p_{io}}$$

et le reste suit